ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

Уравнения вида $P_n(x) = 0$, $n \geq 3$ и сводящиеся к ним.

Одним из способов решения уравнений высших степеней является разложение на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Этот способ основан на применении теоремы Безу:

если число a является корнем многочлена $P_n(x)$, то этот многочлен можно представить в виде $P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$.

Это значит, что если известен один корень уравнения степени n, то с помощью теоремы Безу задачу можно свести к решению уравнения степени n - 1, т. е., как говорят, понизить степень уравнения. Если $P_n(x)$ можно представить в виде $(x — a)Q_{n-k}(x)$ и число x = a не является корнем многочлена $Q_{n-1}(x)$, то говорят, что a является корнем многочлена $P_n(x)$ кратности k.

Как найти хотя бы один корень? Его приходится «угадывать».

Чтобы понять, как угадывать, приведем без доказательства теорему и ее следствия.

Теорема 1.

Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N$ является корнем уравнения

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами

Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем a_0 — коэффициента при старшей степени *x*.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если коэффициент при старшей степени уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, являются целыми числами.

Если удалось угадать корень *a*, то найти частное от деления на *(x — a)* можно, по крайней мере, тремя способами: делением под углом; по схеме Горнера; последовательным выделением слагаемых, имеющих множитель (x — a).

Пример 1: Решите уравнение $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Решение: Замечаем, что x = 1 является корнем уравнения. Выделим множитель (x — 1) при помощи деления уголком.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+0x^2-2x+1 & x-1 \\
\cline{2-2}
x^3-x^2 & x^2+x-1 \\
\cline{1-1}
\quad x^2-2x & \\
\quad x^2-x & \\
\cline{1-1}
\qquad -x+1 & \\
\qquad -x+1 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Тогда $x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x = 1$ *или* $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: 1; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Пример 2: Найдите целые корни уравнения $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10 = 0$.

Решение: Пусть f(x) = $x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10$. Целыми корнями могут быть числа, являющиеся делителем свободного члена, т.е. $\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10$. $f(1) \neq 0$; $f(-1) \neq 0$; f(2)=0, следовательно f(x) делится на (x – 2)

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10 & x - 2 \\
\underline{x^5 - 2x^4} & \overline{x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 5} \\
\quad 2x^4 - 2x^3 & \\
\quad \underline{2x^4 - 4x^3} & \\
\qquad 2x^3 - 8x^2 & \\
\qquad \underline{2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad\quad -4x^2 + 13x & \\
\qquad\quad \underline{-4x^2 + 8x} & \\
\qquad\qquad 5x - 10 & \\
\qquad\qquad \underline{5x - 10} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$\varphi(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 5.$

Проверять $\varphi(1)$ и $\varphi(-1)$ уже не надо, так как если бы эти значения были корнями, то f(1) = 0 и f(-1) = 0, но это не так.

$\varphi(2) \neq 0$; $\varphi(-2) \neq 0$; $\varphi(5) \neq 0$; $\varphi(-5) \neq 0$. Других целых делителей числа 5 нет.

Значит, толк ох=2 – есть целый корень уравнения f(x) = 0, других целых корней нет.

Ответ: 2.

Решите уравнения:

1. $x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = 0.$
2. $x^4 + x^3 - 11x^2 - 5x + 30 = 0$.
3. $12x^4 + 52x^3 - 43x^2 - 13x + 10 = 0$

Ответы:

1. -6; -2; 1.
2. -3;2;$-\sqrt{5};\sqrt{5}$.
3. -5; -0,5;0,5;$\frac{2}{3}$.