24.01.11

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

МОУ гимназия №9

г. Королёв

Алгебра и начала математического анализа 10 класс

А.Г. Мордкович, П.В. Семенов

Учитель математики:

Логачёва Елена Александровна

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x.}$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.}$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Например, справедливы следующие соотношения:

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x;$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2};$$

$$\cos 48^\circ = \cos^2 24^\circ - \sin^2 24^\circ;$$

$$\cos (2x + 6y) = \cos^2 (x + 3y) - \sin^2 (x + 3y);$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{3} - 2t\right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - t\right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{3} - t\right)}.$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 1. Доказать тождества:

а) $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$;

Решение. а) Воспользовавшись тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента, получим:

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2.$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 2. Сократить дробь $\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$.

$$\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Преобразования выполнены при условии $\cos 2x \neq 0$, т. е. $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$. ■

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 3. Вычислить:

а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; в) $\sin 18° \cos 36°$.

Решение. а) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{2\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Заданное выражение представляет собой правую часть формулы синуса двойного аргумента, но без множителя 2. Введя его, получим:

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 0{,}5\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= 0{,}5\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5\cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 3. Вычислить:

а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; **б)** $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; **в)** $\sin 18^\circ \cos 36^\circ$.

в) Этот пример сложнее, но зато красивее предыдущих: здесь нужно догадаться умножить и разделить заданное выражение на $4\cos 18^\circ$. Что это даст? Смотрите:

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{4\cos 18^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{2(2\sin 18^\circ \cos 18^\circ)\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}.$$

Как видите, мы дважды воспользовались формулой синуса двойного аргумента. Чтобы довести вычисления до конца, заметим, что $\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ$. Таким образом,

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 4. Доказать тождество $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

Решение. Преобразуем левую часть доказываемого тождества:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}.$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на 2 (чтобы применить формулу синуса двойного аргумента):

$$\frac{2}{2\cos x \sin x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Итак, $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{2}{\sin 2x}$, что и требовалось доказать. ■

Замечание 1. Еще раз обращаем ваше внимание на то, что тождество доказано лишь для допустимых значений x, конкретнее, для $x \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, т. е. для значений x, при которых имеющиеся знаменатели отличны от нуля.

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 5. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$.

Решение. Для вычислений нам необходимо знать, чему равен $\sin x$. Имеем:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

Отсюда получаем, что $\sin x = -\frac{4}{5}$ (поскольку аргумент x принадлежит четвертой четверти).

а) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$.

б) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

в) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \dfrac{24}{7}$.

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 5. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$, вычислить:

а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $\operatorname{tg} 2x$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$.

г) Для вычисления $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$ сначала воспользуемся формулой приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = \cos 4x$. Затем применим к выражению $\cos 4x$ формулу косинуса двойного аргумента $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$, тем более, что значения $\cos 2x$ и $\sin 2x$ уже найдены:

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} - \frac{576}{625} = -\frac{527}{625}.$$

Ответ: а) $-\frac{7}{25}$; б) $-\frac{24}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $-\frac{527}{625}$.

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 6. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Решение. Если в левой части уравнения применить к выражению $\sin 4x$ формулу синуса двойного аргумента, то удастся разложить левую часть на множители. Имеем последовательно:

$$\sin 4x - \cos 2x = 0;$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0;$$

$$\cos 2x\,(2 \sin 2x - 1) = 0;$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin 2x - 1 = 0.$$

Из уравнения $\cos 2x = 0$ находим:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 6. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.

Из уравнения $2\sin 2x - 1 = 0$ находим:

$$\sin 2x = \frac{1}{2};$$

$$2x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in Z$.

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 7. **Вычислить** $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

Решение. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Тогда, по определению арктангенса (см. § 21), $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. В данном случае можно последнее соотношение конкретизировать: $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, поскольку, по условию, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha > 0$.

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Пример 7. Вычислить $\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}\right)$.

Итак, известно, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ и $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; нужно вычислить $\cos 2\alpha$.

Воспользуемся формулой $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; получим: $1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,

откуда находим, что $\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$ и, соответственно, $\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

А теперь воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Получим:

$$\cos 2\alpha = \cos\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

■

Формулы понижения степени.

Если в формуле $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ заменить $\sin^2 \frac{x}{2}$ на $1 - \cos^2 \frac{x}{2}$, получим: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$, т. е. $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$. Значит,

$$\boxed{\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.} \qquad (1)$$

Если в формуле $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ заменить $\cos^2 \frac{x}{2}$ на $1 - \sin^2 \frac{x}{2}$, получим:

$$\cos x = \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

т. е. $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Значит,

$$\boxed{\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}.}$$

Формулы понижения степени.

$$\boxed{\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}.}$$

$$\boxed{\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.}$$

Формулы понижения степени.

Пример 8. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1-\frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13}.$$

По условию $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, т. е. $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$, значит, аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а в ней косинус положителен.

Поэтому из уравнения $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{4}{13}$ получаем: $\cos\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Формулы понижения степени.

Пример 8. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

б) Воспользуемся формулой понижения степени:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1+\frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}.$$

Выше мы уже установили, что аргумент $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти; в ней синус положителен, поэтому из уравнения $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{13}$ находим, что $\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Формулы понижения степени.

Пример 8. Зная, что $\cos x = -\frac{5}{13}$ и $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, вычислить:

а) $\cos\frac{x}{2}$; б) $\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\text{в) } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{13}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) 1,5.

Формулы понижения степени.

Пример 9. Доказать тождество

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \sin 2x}{2}.$$

Решение. Применим к левой части доказываемого тождества формулу понижения степени:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right)}{2}.$$

Поскольку

$$\cos\left(2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x,$$

то числитель дроби приобретает вид $1 + \sin 2x$, а это значит, что

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \sin 2x}{2}. \qquad \blacksquare$$

Формулы понижения степени.

Пример 10. Решить уравнение $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$.

$$\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}.$$

Тогда заданное уравнение примет вид $\frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{4}$ и далее

$\cos 6x = \frac{1}{2}$.

Получилось не два уравнения, а одно. Находим:

$$6x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

■

Формулы понижения степени.

Пример 10. Решить уравнение $\cos^2 3x = \frac{3}{4}$.

Можно воспользоваться другим способом решения.

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

Формулы понижения степени.

Пример 11. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Решение. Пусть $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Тогда, по определению арккосинуса (см. § 21), $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in [0; \pi]$. В данном случае последнее соотношение можно конкретизировать: $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, поскольку, по условию, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, т. е. $\cos\alpha < 0$.

Итак, известно, что $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; нужно вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Формулы понижения степени.

Пример 11. **Вычислить** $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Выше мы отметили, что $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Значит, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 4$, откуда получаем, что либо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$, либо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -2$. Но $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, а потому $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. В этом промежутке $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0$, значит, из двух указанных выше возможностей выбираем первую: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

Ответ: 2.